МЕТОДОЛОГИЯ ПОСТРОЕНИЯ, РАЗРЕШЕНИЯ И ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ DSGE-МОДЕЛЕЙ

Александр Зарецкий*

Резюме

Динамические стохастические модели общего равновесия (DSGE) – современный прикладной инструмент макроэкономического анализа. Данные модели в настоящее время широко используются центральными банками и другими экономическими институтами. Исследования в области DSGE-моделирования с середины 2000-х гг. осуществляет и Национальный банк Беларуси. DSGE-модели основаны на экономической теории, параметры таких моделей являются структурными, описывающими поведение экономических агентов на микроуровне, что делает DSGE-модели не подверженными критике Лукаса. В данной работе рассматривается методология практического применения DSGE-моделей, в частности механизм нахождения условий оптимальности, лог-линеаризации уравнений модели, решения систем линейных разностных уравнений с рациональными ожиданиями, а также оценки параметров модели.

Содержание

Рабочий материал Исследовательского центра ИПМ
WP/12/05

ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР ИПМ
исследования · прогнозы · мониторинг

ул. Захарова, 50 Б, 220088, Минск, Беларусь
тел./факс +375 17 210 0105
веб-сайт: http://research.by/
e-mail: research@research.by

* Экономист Исследовательского центра ИПМ, e-mail: zaretsky@research.by.

1. ВВЕДЕНИЕ

Современная экономическая наука предполагает широкое применение математических методов как на этапе формализации теоретических положений, так и в ходе проведения практических экономических исследований. Для решения задач, возникающих в процессе реализации экономической политики, необходимы достаточно сложные модели. Примером таких моделей являются динамические стохастические модели общего равновесия (DSGE).

DSGE-модели, с одной стороны, являются формализацией теоретических положений, а с другой стороны, могут использоваться для количественного анализа и прогнозирования. Более того, DSGE-модели теоретически не подвержены критике Лукаса[1], а значит, могут применяться для анализа различных вариантов экономической политики (Galí, 2008). Это является следствием того, что в DSGE-моделях на микроуровне рассматриваются предпочтения экономических агентов и ограничения, в рамках которых они осуществляют свою деятельность (в отличие от традиционных макроэконометрических моделей, в которых изначально анализируются агрегированные показатели). Параметры, характеризующие предпочтения и ограничения, считаются структурными, не подверженными изменению при изменении правил экономической политики.

В настоящее время DSGE-модели используются многими центральными банками и другими экономическими институтами. Исследования в области DSGE-моделирования с середины 2000-х гг. проводит и Национальный банк Беларуси. В частности, Национальным банком была разработана модель среднесрочного прогнозирования и проектирования монетарной политики, которая включает в себя элементы DSGE-моделей (Демиденко, 2008). Это актуализирует исследования в данной области в Беларуси.

В большой части научных работ в области экономики, опубликованных за последние десять лет, для ответа на экономические вопросы авторы строят DSGE-модели. В то же время существует недостаток литературы (особенно русскоязычной), в которой излагаются основы DSGE-моделирования. Цель данной работы – рассмотреть методологию DSGE-моделирования. Для этого в работе анализируется структура DSGE-моделей, методика их разрешения и определения параметров.

Работа имеет следующую структуру. Во втором разделе на основе простой модели реального делового цикла рассматриваются базовые соотношения DSGE-моделей, формулируются оптимизационные задачи экономических агентов, находятся условия оптимальности, проводится процедура по преобразованию модели в стационарную систему. В третьем разделе уравнения рассматриваемой модели лог-линеаризуются около устойчивого состояния, после чего с помощью метода Бланшара – Кана решается полученная система разностных уравнений с рациональными ожиданиями. В четвертом разделе рассматриваются методы определения параметров DSGE-моделей, в частности калибровка, метод максимального правдоподобия, байесовское оценивание и др. В пятом разделе подводятся итоги исследования.

2. СТРУКТУРА DSGE-МОДЕЛИ

Теоретическим фундаментом классических DSGE-моделей следует считать теорию реального делового цикла (RBC). Основателями этой теории являются экономисты Ф.Э. Кидланд и Э.К. Прескотт. Модель общего равновесия, которую они использовали для анализа деловых циклов, можно считать первым примером DSGE-модели.

Теория реального делового цикла основывается на положениях новой классической теории. Так, в RBC модели Кидланда и Прескотта предполагается, что рынки являются совершенно конкурентными, цены полностью гибкими, а ожидания экономических агентов ра-

[1] Критика Лукаса – это ряд критических замечаний Р.Э. Лукаса, относящихся к использованию традиционных макроэконометрических моделей для анализа различных вариантов экономической политики. Лукас указал на то, что параметры таких моделей будут изменяться при изменении экономической политики вследствие изменения ожиданий и поведения рациональных экономических агентов (Lucas, 1976).

циональны (Kydland и Prescott, 1982). Ключевым положением теории реального делового цикла является то, что колебания роста реального выпуска возникают только вследствие шоков, воздействующих на уровень технологии. В дальнейшем DSGE-модели были модифицированы с учетом положений новой кейнсианской теории: вместо совершенно конкурентных рынков стали рассматриваться рынки с монополистической конкуренцией, а также введены предпосылки о жесткости цен и номинальных заработных плат. Примером DSGE-модели, дополненной предпосылками новой кейнсианской теории, является, например, модель, изложенная Galí и Gertler (2007).

Таким образом, большинство современных DSGE-моделей, с одной стороны, основаны на теории рациональных ожиданий и строятся на основе методологии, предложенной Кидландом и Прескоттом в начале 1980-х гг., а с другой стороны, в них рассматриваются монополистически конкурентные рынки и учитывается номинальная жесткость цен и заработных плат.

Стандартными этапами построения DSGE-модели являются спецификация модели, нахождение условий оптимальности, лог-линеаризация соотношений модели около устойчивого состояния, решение лог-линеаризованной системы, нахождение значений параметров модели.

Рассматриваемая в данной работе DSGE-модель охватывает поведение домохозяйств и фирм. Наиболее объемные DSGE-модели могут включать также анализ поведения экономических властей, реализующих монетарную и фискальную политику, и экономических агентов, создающих внешний спрос. Примером такой модели является DSGE-модель, используемая Европейским центральным банком (Christoffel, Coenen и Warne, 2008). Тем не менее для анализа базовых характеристик DSGE-моделей представляется целесообразным рассмотреть более простую модель. В качестве примера используется модификация модели, изложенной во второй главе Galí (2008). В частности, принимаются следующие предпосылки:

1. помимо потребления, домохозяйства могут осуществлять инвестиции. Это позволяет дополнить модель процессом накопления капитала, а также специфицировать более реалистичную производственную функцию;
2. для простоты из модели исключается возможность приобретения домохозяйствами облигаций;
3. так как государственный сектор в модели не рассматривается, то для упрощения налоги также не моделируются.

2.1. Репрезентативное домохозяйство

Домохозяйство в каждом периоде времени t решает следующую задачу:

$$\max_{C_t^\infty, H_t^\infty} E_t\left\{\sum_{n=t}^{\infty} \beta^{n-t}\left(\ln C_n - \gamma\frac{H_n^{1+\varphi}}{1+\varphi}\right)\right\}, \qquad (1)[2]$$

где C_t – объем потребления некоторого композитного товара, H_t – количество отработанных часов, $E_t\{X_n\} = E(X_n|IN_t)$ – рациональное ожидание переменной X_n (математическое ожидание переменной X_n при условии доступной в периоде времени t информации (IN_t)), $0 < \beta < 1$ – коэффициент дисконтирования, $0 < \gamma < 1$ – параметр масштаба[3], $\varphi \geq 0$ – параметр, в оптимуме обратный эластичности H_t по реальной заработной плате.

[2] Похожую функцию полезности (выражение в круглых скобках) применяют, например, Christoffel, Coenen и Warne (2008) и Christiano, Trabandt и Walentin (2010).

[3] Необходимость использования данного параметра связана с определением H_t как количества отработанных часов за период. Если не использовать γ, то значение совокупной полезности за период в большинстве случаев будет отрицательной. Можно привести простой пример. Если $\varphi = 1$, n – день, $H_t = 8$, то, чтобы полезность была положительной, должно выполняться условие $C_t > e^{32}$. Очевидно, что такое условие в большинстве случаев соблюдаться не будет. Поэтому для придания большего экономического смысла функции полезности в ней используется параметр γ.

Соотношение (1) отражает проблему максимизации ожидаемой дисконтированной суммы значений функции полезности репрезентативного домохозяйства. Проблема задается на бесконечном временном интервале. Полезность для домохозяйства возрастает при увеличении потребления и снижается при увеличении объема отработанных часов.

Репрезентативное домохозяйство в модели владеет запасом капитала и сдает его в аренду фирмам. Домохозяйство может потреблять производимый фирмами композитный товар либо использовать его для осуществления инвестиций[4]. Объем потребления и инвестиций домохозяйства не может превышать объем его заработной платы и арендной платы за капитал, поэтому домохозяйство осуществляет свою деятельность в условиях следующего бюджетного ограничения:

$$P_t(C_t + I_t) \leq W_t H_t + R_t K_t, \tag{2}$$

где P_t – цена товара, I_t – объем инвестиций, W_t – заработная плата за час работы, R_t – ставка арендной платы за использование капитала, K_t – запас капитала, которым владеет домохозяйство.

Процесс накопления капитала описывается соотношением:

$$K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + I_t, \tag{3}$$

где $0 < \delta < 1$ – норма амортизации.

Для решения проблемы (1) при учете (2) и (3), то есть решения динамической (бесконечный временной интервал) и стохастической (ожидаемая, а не детерминированная, полезность) оптимизационной задачи, можно использовать различные методы. В частности, можно применить теорему Каруша – Куна – Такера и метод стохастического динамического программирования, что рассматривают, например, Heer и Maußner (2009), а также использовать вариационный аргумент, который применяет Galí (2008). В работе используются условия Каруша – Куна – Такера. Детали решения проблемы домохозяйства находятся в Приложении 1. Воспроизведем полученные условия оптимальности:

$$\frac{W_t}{P_t} = \gamma C_t H_t^{\varphi} \tag{4}$$

$$\beta E_t \left\{ \frac{R_{t+1}}{C_{t+1} P_{t+1}} + \frac{1 - \delta}{C_{t+1}} \right\} = \frac{1}{C_t} \tag{5}$$

$$P_t(C_t + I_t) = W_t H_t + R_t K_t. \tag{6}$$

Условие (4) показывает, что в оптимуме реальная заработная плата равна предельной норме замещения свободного времени (которое можно обозначить как $T_t - H_t$, где T_t – число часов в периоде времени t) потреблением. (4) можно также интерпретировать как положительную зависимость предложения труда от реальной заработной платы и предельной полезности потребления.

В условии (5)[5] отражена положительная взаимосвязь между предельной нормой межвременного замещения текущего потребления будущим и ожидаемой реальной ставкой арендной платы. Если ожидаемая ставка увеличивается, то оптимально направить часть текущего потребления на инвестиции и, следовательно, увеличить будущий запас капитала. Больший запас капитала в следующем периоде вместе с более высокой ставкой арендной платы приведет к большей сумме поступлений от аренды, которые в том числе сделают воз-

[4] Понятно, что это не самое реалистичное положение, однако целью данной работы является не построение максимально реалистичной модели, а анализ принципов DSGE-моделирования. В то же время использование таких упрощений является распространенным методом. Например, модели с похожими характеристиками рассматривает Hansen (1985).

[5] Соотношения вида (5) входят в класс уравнений Эйлера (Heer и Maußner, 2009, с. 12).

можным больший объем потребления, который компенсирует изначальный объем потребления, от которого домохозяйство отказалось в текущем периоде.

Условие (6) показывает, что домохозяйство полностью расходует свой доход на потребление и инвестиции.

2.2. Репрезентативная фирма

Фирма в каждом периоде времени t решает проблему максимизации прибыли:

$$\max_{Y_t, H_t, K_t} \{P_t Y_t - W_t H_t - R_t K_t\}, \tag{7}$$

где Y_t – выпуск репрезентативной фирмы.

Выпуск ограничен производственной функцией вида[6]:

$$Y_t = A_t K_t^{\alpha} (z_t H_t)^{1-\alpha}, \tag{8}$$

где A_t – экзогенная переменная, отражающая общефакторную производительность, $0 < \alpha < 1$ – параметр, равный эластичности выпуска по капиталу, z_t – тренд, приводящий к росту эффективности труда. Для упрощения предполагается детерминированный тренд с темпом прироста $g > 1$.[7]

Общефакторная производительность описывается следующим процессом[8]:

$$A_t = A_{t-1}^{\rho} A^{1-\rho} e^{\varepsilon_t}, \tag{9}$$

где $0 < \rho < 1$ – параметр, характеризующий силу связи между значениями общефакторной производительности в смежные периоды времени, $A > 0$ – устойчивое значение уровня общефакторной производительности, $\varepsilon_t \sim NI(0, \sigma^2)$ – временный шок, обуславливающий колебания общефакторной производительности (технологический шок), σ – стандартное отклонение технологического шока.

Решение проблемы фирмы приводит к следующим условиям оптимальности (детали решения находятся в Приложении 2):

$$\frac{W_t}{P_t} = (1-\alpha) \frac{Y_t}{H_t} \tag{10}$$

$$\frac{R_t}{P_t} = \alpha \frac{Y_t}{K_t}. \tag{11}$$

Условия (10), (11) описывают спрос фирмы на труд и капитал и показывают, что в оптимуме реальная заработная плата равна предельному продукту труда, а реальная ставка арендной платы – предельному продукту капитала.

2.3. Равновесие

В равновесии выполняется равенство спроса на товар со стороны репрезентативного домохозяйства и предложения товара репрезентативной фирмой, то есть:

$$Y_t = C_t + I_t. \tag{12}$$

[6] Похожие производственные функции используют Ireland (2004) и Christoffel, Coenen и Warne (2008).

[7] В качестве альтернативы можно задать стохастический тренд. Например, стохастический тренд вводят Christoffel, Coenen и Warne (2008). В то же время для успешного разрешения модели темп роста тренда необходимо представлять в виде стационарного процесса с некоторым устойчивым значением, что ограничивает реалистичность модели. Например, для Беларуси данное предположение не соблюдается. Поэтому усложнение модели (в лог-линеаризованных соотношениях модели будет участвовать дополнительная переменная, отражающая логарифмическое отклонение темпа роста от устойчивого значения) путем задания стохастического тренда в рамках данного исследования можно считать нецелесообразным.

[8] По аналогии с (Ireland, 2004).

Так как рассматриваемые в модели экономические агенты репрезентативны, то соотношение (12) можно также интерпретировать как равенство совокупного спроса и предложения, а все предыдущие соотношения рассматривать с позиции экономики в целом.

Соотношения (3)–(6), (8)–(12) – это группа равенств, описывающих механизм функционирования моделируемой экономики, оптимальное поведение экономических агентов. Далее рассматриваются только соотношения (3)–(5), (8)–(12), так как (6) (с учетом (12)) является комбинацией (10) и (11).

На этом этапе можно было бы приступить к разрешению модели, то есть нахождению равновесных значений переменных, однако в большинстве случаев, включая наш, такое решение найти невозможно[9]. В общем случае это является следствием того, что многие соотношения DSGE-моделей нелинейны, некоторые уравнения представляют собой рекуррентные соотношения, причем в уравнениях могут присутствовать ожидаемые значения переменных. Основной проблемой является последнее свойство. Например, в рассматриваемой модели «проблемным» является уравнение (5). Для того чтобы решить данную проблему, необходимо сначала осуществить лог-линеаризацию соотношений модели около устойчивого состояния, а затем решить полученную систему линейных разностных уравнений с рациональными ожиданиями.

Поскольку большинство переменных модели, очевидно, нестационарны, то сначала, исходя из допущения о том, что они стационарны вокруг тренда, выполняется процедура исключения тренда из переменных, что также осуществляли, например, Smets и Wouters (2002), Ireland (2004), Christoffel, Coenen и Warne (2008). Для этого, предполагая, что все реальные переменные, за исключением H_t, содержат общий тренд, связанный с ростом эффективности труда, они делятся на z_t[10]. Также предполагается, что все номинальные переменные содержат общий стохастический тренд, связанный с ценой товара[11], и осуществляется их трансформация в реальные. Таким образом, условия (3)–(5), (8)–(12) принимают следующий вид:

$$k_{t+1} = \frac{1-\delta}{g} k_t + i_t \tag{13}$$

$$w_t = \gamma c_t h_t^{\varphi} \tag{14}$$

$$\beta E_t \left\{ \frac{r_{t+1} + 1 - \delta}{c_{t+1}} \right\} = \frac{g}{c_t} \tag{15}$$

$$y_t = g^{-\alpha} a_t k_t^{\alpha} {h_t}^{1-\alpha} \tag{16}$$

$$a_t = a_{t-1}^{\rho} A^{1-\rho} e^{\varepsilon_t} \tag{17}$$

$$w_t = (1-\alpha)\frac{y_t}{h_t} \tag{18}$$

$$r_t = \alpha g \frac{y_t}{k_t} \tag{19}$$

$$y_t = c_t + i_t, \tag{20}$$

где $k_t = K_t/z_{t-1}$[12], $i_t = I_t/z_t$, $w_t = W_t/(P_t z_t)$[13], $c_t = C_t/z_t$, $h_t = H_t$, $r_t = R_t/P_t$, $y_t = Y_t/z_t$, $a_t = A_t$.

[9] Пример модели, которая может быть решена аналитически, приводит Den Haan (2010).
[10] Такой подход применяли Ireland (2004), Christoffel, Coenen и Warne (2008).
[11] Такой подход применяли Christoffel, Coenen и Warne (2008).
[12] Объем капитала делится на уровень эффективности труда в предыдущем периоде, так как капитал – это предопределенная в предыдущем периоде переменная. Такой подход применяют Christoffel, Coenen и Warne (2008).

В результате проведения процедуры исключения тренда систему уравнений (13)–(20) можно считать стационарной системой, которая описывает динамику реальных стационарных переменных. Необходимо заметить, что такой метод трансформации системы в стационарную, безусловно, не является однозначным. Чтобы применять такой подход, вообще говоря, необходимо сначала протестировать временные ряды соответствующих переменных на существование общих детерминированных/стохастических трендов. Эту проблему рассматривают, например, Juselius и Franchi (2007).

3. ЛОГ-ЛИНЕАРИЗАЦИЯ СООТНОШЕНИЙ DSGE-МОДЕЛИ И ЕЕ РЕШЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА БЛАНШАРА – КАНА

3.1. Лог-линеаризация соотношений модели около устойчивого состояния

Процесс лог-линеаризации заключается в преобразовании соотношений модели таким образом, что все уравнения становятся линейными функциями относительно переменных, представленных в виде логарифмических отклонений от устойчивых значений, то есть, например, $\hat{x}_t = \ln\left(\frac{x_t}{x}\right)$, где x_t – значение переменной в периоде времени t, а x – ее устойчивое (steady state) значение[14] (Uhlig, 1995). Соответственно, сначала необходимо найти устойчивые значения переменных, которые они принимают в отсутствии каких-либо шоков. Понятно, что устойчивое значение может существовать только у стационарной переменной. Так как была осуществлена трансформация переменных, то можно вычислить их устойчивые значения. Процесс их нахождения заключается в замене значений переменных в каждом периоде времени на их устойчивое значение, которое принимается за константу. Причем целью является нахождение устойчивых значений, которые в итоге определяются только параметрами модели. Для этого необходимо решить систему уравнений (13)–(20), преобразовав каждое уравнение с учетом вышеуказанного. Решая данную систему, получаем:

$$c = \left(1 - \frac{\alpha\lambda}{\kappa}\right) y \tag{21}$$

$$h = \left[\frac{\kappa(1-\alpha)}{\gamma(\kappa - \alpha\lambda)}\right]^{\frac{1}{1+\varphi}} \tag{22}$$

$$i = \frac{\alpha\lambda}{\kappa} y \tag{23}$$

$$k = \frac{\alpha g}{\kappa} y \tag{24}$$

$$r = \frac{g}{\beta} - 1 + \delta \tag{25}$$

$$w = (1-\alpha)^{\frac{\varphi}{1+\varphi}} \left(\gamma - \gamma\frac{\alpha\lambda}{\kappa}\right)^{\frac{1}{1+\varphi}} y \tag{26}$$

В то же время Ireland (2004) делит капитал на текущий уровень эффективности. В данной работе используется подход, применяемый Christoffel, Coenen и Warne (2008), так как он представляется более корректным.

[13] Как и в (Christoffel, Coenen и Warne, 2008), предполагается, что номинальная заработная плата содержит и стохастический тренд, связанный с ценами, и тренд, связанный с ростом эффективности труда (который содержит реальная заработная плата).

[14] Аналогичные обозначения будут применяться для всех переменных и далее.

$$y = a^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{\alpha}{\kappa}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left[\frac{\kappa(1-\alpha)}{\gamma(\kappa-\alpha\lambda)}\right]^{\frac{1}{1+\varphi}}, \tag{27}$$

где $\lambda = g - 1 + \delta$, $\kappa = \frac{g}{\beta} - 1 + \delta$, $a = A$ (это видно из (17)).

(27) можно подставить в (21), (23), (24), (26) и найти соответствующие устойчивые значения, определяемые только параметрами модели.

После того как устойчивые значения переменных определены, можно осуществлять лог-линеаризацию равновесных соотношений модели. Для этого можно использовать два подхода. Во-первых, можно применить разложение в ряд Тейлора первого порядка для обеих частей уравнений, а затем преобразовать результат, учитывая разложение в ряд Тейлора первого порядка для логарифмической функции. Во-вторых, можно использовать подстановку вида:

$$x_t = xe^{\hat{x}_t}. \tag{28}$$

Подстановка вида (28) применяется ко всем переменным модели, а соотношения модели затем преобразуются, учитывая уравнения, описывающие устойчивые состояния модели, а также вид разложения в ряд Тейлора некоторых функций.

В работе применен первый подход и получены следующие соотношения (детали лог-линеаризации на примере соотношения (13) изложены в Приложении 3):

$$g\hat{k}_{t+1} \approx (1-\delta)\hat{k}_t + \lambda\hat{\imath}_t \tag{29}$$

$$\hat{w}_t = \hat{c}_t + \varphi\hat{h}_t \tag{30}$$

$$\hat{c}_t \approx E_t\hat{c}_{t+1} - \frac{\beta\kappa}{g}E_t\hat{r}_{t+1} \tag{31}$$

$$\hat{y}_t = \hat{a}_t + \alpha\hat{k}_t + (1-\alpha)\hat{h}_t \tag{32}$$

$$\hat{a}_t = \rho\hat{a}_{t-1} + \varepsilon_t \tag{33}$$

$$\hat{w}_t = \hat{y}_t - \hat{h}_t \tag{34}$$

$$\hat{r}_t = \hat{y}_t - \hat{k}_t \tag{35}$$

$$\hat{y}_t \approx \left(1 - \frac{\alpha\lambda}{\kappa}\right)\hat{c}_t + \frac{\alpha\lambda}{\kappa}\hat{\imath}_t. \tag{36}$$

В некоторых соотношениях используется знак равенства, что обусловлено тем, что их можно получить без разложения в ряд Тейлора, а путем логарифмирования базовых соотношений и вычитания логарифма устойчивого состояния.

3.2. Разрешение модели с помощью метода Бланшара – Кана

Система (29)–(36) – это система линейных уравнений, которая включает разностные уравнения, причем содержащие ожидаемые значения переменных. Для решения систем линейных разностных уравнений с рациональными ожиданиями можно использовать методы, разработанные Blanchard и Kahn (1980), Uhlig (1995), Klein (2000), Sims (2000) и др. В работе используется классический метод Бланшара – Кана.

Первым этапом применения метода Бланшара – Кана является трансформация модели в форму:

$$\begin{bmatrix} B_{t+1} \\ E_tD_{t+1} \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} B_t \\ D_t \end{bmatrix} + BZ_t, \tag{37}$$

где B_t – вектор переменных, предопределенных в предыдущий период времени, D_t – вектор переменных, значения которых определяются в текущий период времени, A, B – матрицы параметров, Z_t – вектор экзогенных переменных.

Систему (29)–(36)[15] можно записать в виде:

$$C\begin{bmatrix} B_{t+1} \\ E_t D_{t+1} \end{bmatrix} = D\begin{bmatrix} B_t \\ D_t \end{bmatrix} + FZ_t, \tag{38}$$

где $C_{7\text{x}7}$[16], $D_{7\text{x}7}$ – матрицы, вид которых приведен в Приложении 4, $B_t = \hat{k}_t$, $D_t = \\ = [\hat{c}_t \quad \hat{h}_t \quad \hat{\imath}_t \quad \hat{r}_t \quad \hat{w}_t \quad \hat{y}_t]^T$, $F = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$, $Z_t = \hat{a}_t$.

В рассматриваемой модели матрица C сингулярна, что не позволяет представить (38) в виде (37) и продолжить процедуру решения модели. Для того чтобы решить эту проблему, необходимо несколько преобразовать динамическую систему. Используя подход, примененный Ireland (2004), сначала запишем в матричном виде соотношения (30), (32), (34)–(36), которые содержат переменные только одного периода времени:

$$GF_t = HG_t + K\hat{a}_t, \tag{39}$$

где вид матриц $G_{5\text{x}5}$, $H_{5\text{x}2}$ представлен в Приложении 4, $F_t = [\hat{h}_t \quad \hat{\imath}_t \quad \hat{r}_t \quad \hat{w}_t \quad \hat{y}_t]^T$, $G_t = \\ = [\hat{k}_t \quad \hat{c}_t]^T$, $K = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$.

Соотношения (29), (31), в свою очередь, можно представить следующим образом:

$$LE_tG_{t+1} + ME_tF_{t+1} = NG_t + PF_t, \tag{40}$$

где вид матриц $L_{2\text{x}2}$, $M_{2\text{x}5}$, $N_{2\text{x}2}$, $P_{2\text{x}5}$ представлен в Приложении 4.

Умножив слева обе части (39) на G^{-1}, подставив результат в (40) и преобразовав итоговое выражение, получаем:

$$E_tG_{t+1} = QG_t + R\hat{a}_t, \tag{41}$$

где $Q_{2\text{x}2} = (L + MG^{-1}H)^{-1}(N + PG^{-1}H)$, $R_{2\text{x}1} = (L + MG^{-1}H)^{-1}(PG^{-1}K - MG^{-1}K\rho)$[17].

Несложно заметить, что (41) – это пример модели в форме (37). Помимо решения проблемы сингулярности матрицы C в (38), упростился дальнейший процесс решения, так как (41) содержит только две эндогенные переменные.

Ключевая идея, заложенная в методе Бланшара – Кана, заключается в свойстве квадратных матриц, которое позволяет осуществить декомпозицию матрицы Q следующим образом:

$$Q = SJS^{-1}, \tag{42}$$

где $S_{2\text{x}2}$ – матрица, столбцами которой являются обобщенные собственные векторы матрицы Q, $J_{2\text{x}2}$ – жорданова форма матрицы Q (верхнетреугольная матрица, на главной диагонали которой находятся собственные значения матрицы Q, все значения выше главной диагонали равны нулю, кроме значений на первой наддиагонали, которые могут быть равны единице).

Вид матриц S и J не приводится, так как в нашем случае они очень громоздки. Заметим, что элементы на главной диагонали матрицы J упорядочиваются от меньшего до большего по модулю (что предполагает также перестановку столбцов матрицы S).

Учитывая (42), (41) можно преобразовать в следующий вид:

$$E_tG_{t+1}^* = JG_t^* + U\hat{a}_t, \tag{43}$$

где $G_t^* = S^{-1}G_t$, $U_{2\text{x}1} = S^{-1}R$.

Запишем (43) учитывая вид векторов и матриц и выполнив операции умножения:

---

[15] Без соотношения (33), которое определяет экзогенную динамику общефакторной производительности.

[16] 7x7 – размерность матрицы.

[17] В процессе вычисления использовался очевидный результат: $E_t\hat{a}_{t+1} = \rho\hat{a}_t$ (так как $E(\varepsilon_t) = 0$). Несложно также показать, что $E_t\hat{a}_{t+k} = \rho^k\hat{a}_t$.

$$\begin{bmatrix} E_t G_{1,t+1}^* \\ E_t G_{2,t+1}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 G_{1,t}^* \\ J_2 G_{2,t}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_1 \hat{a}_t \\ U_2 \hat{a}_t \end{bmatrix}. \quad (44)[18]$$

Для того чтобы система (44) имела единственное решение, необходимо выполнение условий:

$$|J_1| \leq 1, |J_2| > 1. \quad (45)$$

Если оба собственных значения матрицы Q по модулю превышают единицу, то система не имеет решений (более корректно – стабильных решений, так как это пример взрывного (explosive) решения). Если оба собственных значения по модулю меньше либо равны единице, то система имеет бесконечное число решений. Доказательство этих утверждений приводят Blanchard и Kahn (1980).

В рассматриваемой модели собственные значения матрицы Q – это громоздкие выражения. Проверить выполнение условия (45) в общем виде представляется затруднительным. Зачастую предполагается достаточным ограничиться предположением о том, что условие (45) выполняется. Если условие не выполняется при практической реализации модели, то нужно несколько изменить значения параметров. Тем не менее проверка условия (45) была осуществлена для определенных значений параметров с помощью простого алгоритма, представленного в Приложении 5. В алгоритме, реализованном на языке MATLAB, учитывая ограничения на параметры модели ($0 < \alpha, \beta, \delta < 1$, $\varphi \geq 0$, $g > 1$), перебирается множество возможных комбинаций параметров и тестируется выполнение условия (45). С помощью алгоритма было протестировано более 14 миллионов возможных комбинаций параметров, и во всех случаях условие (45) выполняется.

В (44) есть два уравнения, содержащих ожидаемые значения переменных. Выполнение условия (45) позволяет решить второе уравнение и получить выражение для $G_{2,t}^*$, которое не содержит ожидаемых значений переменных:

$$G_{2,t}^* = \frac{U_2}{\rho - J_2} \hat{a}_t. \quad (46)$$

Вывод соотношения (46) находится в Приложении 6.

Учитывая, что $G_t^* = S^{-1} G_t$, запишем следующее:

$$\begin{bmatrix} G_{1,t}^* \\ G_{2,t}^* \end{bmatrix} = S^{-1} \begin{bmatrix} \hat{k}_t \\ \hat{c}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{k}_t \\ \hat{c}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}\hat{k}_t + S_{12}\hat{c}_t \\ S_{21}\hat{k}_t + S_{22}\hat{c}_t \end{bmatrix}. \quad (47)$$

Учитывая (46), получаем выражение для $\hat{c}_t$:

$$\hat{c}_t = V_1 \hat{k}_t + V_2 \hat{a}_t, \quad (48)$$

где $V_1 = -\frac{S_{21}}{S_{22}}$, $V_2 = \frac{U_2}{S_{22}(\rho - J_2)}$.

Подставив (48) в верхнее уравнение в (47), а затем подставив результат в верхнее уравнение в (44) и преобразовав, в итоге получим:

$$\hat{k}_{t+1} = J_1 \hat{k}_t + V_3 \hat{a}_t, \quad (49)$$

где $V_3 = \frac{J_1 S_{12} V_2 + U_1 - S_{12} V_2 \rho}{S_{11} + S_{12} V_1}$.

Учитывая (48) и (39), получаем:

$$F_t = V_4 \hat{k}_t + V_5 \hat{a}_t, \quad (50)$$

где $V_4 = G^{-1} H [1 \quad V_1]^T$, $V_5 = G^{-1} H [0 \quad V_2]^T + G^{-1} K$ – векторы размерности 5x1.

[18] В нашем случае матрица J диагональна. Если число линейно независимых собственных векторов матрицы Q меньше размерности матрицы Q, некоторые элементы матрицы J (в нашем случае – один элемент), находящиеся выше главной диагонали, могут быть равны единице.

Соотношения (33), (48)–(50) описывают динамику линеаризованной системы. Эти соотношения можно записать в более компактном виде следующим образом:

$$L_{t+1} = \mathrm{W}L_t + X\varepsilon_{t+1} \tag{51}$$

$$M_t = \mathrm{Y}L_t, \tag{52}$$

где $L_t = [\hat{k}_t \quad \hat{a}_t]^T$, $\mathrm{W} = \begin{bmatrix} J_1 & V_3 \\ 0 & \rho \end{bmatrix}$, $X = [0 \quad 1]^T$, $M_t = [\hat{c}_t \quad F_t^T]^T$, $\mathrm{Y}_{6\ \mathrm{x}2} = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \\ V_4 & V_5 \end{bmatrix}$.

Алгоритм разрешения модели на языке MATLAB представлен в Приложении 7.

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ DSGE-МОДЕЛИ

Существует два основных подхода к определению параметров DSGE-моделей: калибровка параметров и их оценивание с помощью эконометрических методов (метод максимального правдоподобия, обобщенный метод моментов и др.). Тем не менее калибровка часто может предполагать некоторое использование эконометрических методов, а эконометрическое оценивание – использование калибровки. В частности, широко распространенным является байесовский подход, в рамках которого независимо производится калибровка параметров и их эконометрическое оценивание, после чего, учитывая результаты обеих процедур, вычисляются финальные оценки параметров.

4.1. Калибровка

Сущность калибровки заключается в определении параметров модели на основе статистических характеристик данных, результатов микро- и макроэконометрических исследований, теоретических соображений[19]. В частности, наиболее распространенным методом является присвоение параметрам таких значений, при которых устойчивые значения переменных, определенные с помощью модели, будут соответствовать средним значениям реальных временных рядов (так, однако, могут быть определены не все параметры).

Возвращаясь к рассматриваемой модели, $\alpha, \beta, \delta, g, A$ и γ могут быть найдены путем решения системы (21)–(27) или (13)–(20) (что более просто, но предварительно необходимо заменить значения переменных на константы, соответствующие устойчивым значениям) относительно параметров. Выражения для вышеназванных параметров (в общем виде) приведены в Приложении 8. Для того чтобы определить значение параметра φ, можно использовать результаты микроэконометрических исследований или результаты его оценки в других работах, связанных с DSGE-моделированием. Параметры ρ и σ можно определить, оценив уравнение (33) с помощью метода наименьших квадратов, предварительно построив ряд общефакторной производительности (который можно легко получить на основе временных рядов по выпуску, капиталу и труду, используя определенное ранее значение параметра α). В данном случае идет речь об использовании эконометрических методов, однако это не противоречит сущности процедуры калибровки параметров, так как полноценное эконометрическое оценивание предполагает применение эконометрических методов к системе уравнений в целом. В то же время механизм определения ρ и σ является примером того, что калибровка не обязательно исключает использование эконометрики.

4.2. Метод максимального правдоподобия

Метод максимального правдоподобия заключается в получении оценок параметров путем максимизации функции правдоподобия, то есть функции совместной плотности вероятности выборки[20].

В случае DSGE-моделей метод максимального правдоподобия не может быть применен автоматически, так как не существует статистики по переменной, отражающей общефактор-

---

[19] Сущность процесса калибровки подробно описывают, например, Cooley и Prescott (1995), Murchison и Rennison (2006), Heer и Maußner (2009).

[20] Сущность метода максимального правдоподобия подробно изложена Hamilton (1994).

ную производительность (ряд не может быть построен, так как параметр α подлежит оценке). Помимо ряда общефакторной производительности ненаблюдаемыми в различных DSGE-моделях признаются и другие ряды. В частности, довольно часто ненаблюдаемым признается ряд капитала, например в моделях, построенных Smets и Wouters (2002), Ireland (2004), Christoffel, Coenen и Warne (2008). Для формирования временных рядов ненаблюдаемых переменных используют фильтр Кальмана.

Еще одной проблемой, возникающей при использовании метода максимального правдоподобия, является проблема стохастической сингулярности DSGE-моделей[21]. Например, в рассматриваемой модели существует только один шок – временный технологический шок, влияющий на общефакторную производительность. Остальные переменные определяются на основе уравнений, не содержащих шоков. Присутствие в системе только одного шока приводит к тому, что ковариационная матрица вектора наблюдаемых переменных будет иметь неполный ранг, а значит, нельзя определить ее обратную матрицу, которая является необходимым элементом в функции правдоподобия в случае использовании предпосылки о многомерном нормальном распределении вектора наблюдаемых переменных (что делается в большинстве случаев).

Запишем логарифмическую функцию правдоподобия для рассматриваемой модели:

$$\ln L(\theta|\mathcal{F}) = -3Z\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{Z}\ln|Y\Gamma_t Y^T| - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{Z}[(M_t)^T(Y\Gamma_t Y^T)^{-1}M_t], \qquad (53)$$

где L – функция правдоподобия, θ – вектор параметров модели, $\mathcal{F}$ – матрица, содержащая выборку по переменным вектора M_t за период времени от 1 до Z, $\Gamma_t = E[L_t(L_t)^T]$[22].

Ранг ковариационной матрицы $Y\Gamma_t Y^T$ в (53) неполный для любых значений параметров, что легко показать, произведя операции умножения и транспонирования для матриц в общем виде и приведя полученную матрицу к ступенчатому виду. Данную матрицу нельзя инвертировать, а значит, (53) является неопределенной величиной.

Для решения проблемы стохастической сингулярности применяют два метода. Первый заключается в добавлении в модель дополнительных структурных шоков, пока количество шоков не будет равно количеству наблюдаемых переменных. Второй – во введении в модель ошибок измерения. В нашем случае второй метод будет заключаться в добавлении вектора ошибок измерения в правую часть (52). Оба подхода имеют свои недостатки. Дополнительные структурные шоки накладывают на модель дополнительные теоретические ограничения, а введение ошибок измерения можно интерпретировать как искусственную меру, необходимость применения которой свидетельствует о том, что модель является плохо специфицированной. Тем не менее ошибки измерения могут быть интерпретированы и как результат несоответствия реальных статистических данных теоретическим переменным, рассматриваемым в модели, что делает применение данного метода обоснованным.

Возвращаясь к проблеме ненаблюдаемых переменных, то есть к использованию фильтра Кальмана[23], модель сначала должна быть представлена в пространстве состояний (state-space representation). Рассматриваемая модель, записанная в виде (51)–(52), уже представлена необходимым образом. (51) – это уравнение состояния (state equation), (52) – уравнение наблюдения (observation equation). Тем не менее, для того чтобы применить фильтр Кальмана, необходимо решить проблему стохастической сингулярности, так как в ходе вычислений

---

[21] Эту проблему обсуждают, например, Ireland (2004), Ruge-Murcia (2007), Tovar (2009).

[22] При выводе функции правдоподобия математическое ожидание элементов вектора, описываемого в (51), было принято равным нулю, что автоматически делает равным нулю математические ожидания элементов вектора (52). Можно заметить, что собственные значения матрицы W равны J_1 и ρ. $0 < \rho < 1$ по определению, а J_1 теоретически может быть равно единице. Однако в ходе выполнения алгоритма, описанного в Приложении 5, во всех случаях выполнялось ограничение $|J_1| < 1$, на основе чего можно заключить, что процесс в (51) стационарен, что обуславливает равенство нулю математических ожиданий (Hamilton, 1994, с. 378).

[23] Механизм использования фильтра Кальмана подробно рассматривают Hamilton (1994), Ljungqvist и Sargent (2004).

возникнет та же проблема, что и при вычислении функции правдоподобия (необходимо будет инвертировать ковариационную матрицу). Поэтому преобразуем (52) в:

$$M_t = YL_t + \omega_t, \tag{54}$$

где ω_t – вектор ошибок измерения размерности 6x1. Делается предположение, что ошибки нормально распределены с нулевым средним, а их ковариационная матрица диагональна.

Формулы фильтра Кальмана для рассматриваемой модели следующие:

$$\tilde{L}_{t+1} = \mathrm{W}\tilde{L}_t + \mathbb{K}_t\left(M_t - Y\tilde{L}_t\right) \tag{55}$$

$$\mathbb{K}_t = \mathrm{W}\Sigma_t Y^T (Y\Sigma_t Y^T + \mathbb{Q})^{-1} \tag{56}$$

$$\Sigma_{t+1} = \mathrm{W}\Sigma_t\mathrm{W}^T + X\sigma^2 X^T - \mathrm{W}\Sigma_t Y^T (Y\Sigma_t Y^T + \mathbb{Q})^{-1} Y\Sigma_t \mathrm{W}^T, \tag{57}$$

где переменные с тильдой являются оценками на основе фильтра Кальмана, $\mathbb{K}_t$ – матрица, называемая усилением Кальмана (Kalman gain), $\Sigma_t = E\left[\left(L_t - \tilde{L}_t\right)\left(L_t - \tilde{L}_t\right)^T\right]$, $\mathbb{Q} = E(\omega_t\omega_t^T)$.

Для того чтобы использовать формулы фильтра Кальмана, необходимо определить начальное значение вектора ненаблюдаемых переменных и ковариационной матрицы ошибки прогноза (оценки). Начальные значения в нашем случае вычисляются следующим образом: $\tilde{L}_1 = E(L_1) = 0_{2\text{x}1}$, $vec(\Sigma_1) = (I_{4\text{x}4} - \mathrm{W}\otimes\mathrm{W})^{-1}X\otimes\mathrm{X}\sigma^2$, где vec – оператор векторизации (преобразования матрицы в вектор путем последовательного размещения столбцов один под другим), I – единичная матрица, $\otimes$ – произведение Кронекера[24]. Вычислив начальные значения, можно последовательно применять формулы (55)–(57) для построения временных рядов ненаблюдаемых переменных.

Оценив значения ненаблюдаемых переменных, можно применить результаты фильтра Кальмана для спецификации функции правдоподобия. В нашем случае логарифмическая функция правдоподобия принимает следующий вид:

$$\begin{gathered}\ln L(\theta|\mathcal{F}) = -3Z\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\sum\nolimits_{t=1}^{Z}\ln|Y\Sigma_t Y^T + \mathbb{Q}| - \\ -\frac{1}{2}\sum\nolimits_{t=1}^{Z}\left[\left(M_t - Y\tilde{L}_t\right)^T (Y\Sigma_t Y^T + \mathbb{Q})^{-1}\left(M_t - Y\tilde{L}_t\right)\right].\end{gathered} \tag{58}$$

В функции (58) матрица $Y\Sigma_t Y^T + \mathbb{Q}$ не является сингулярной, поэтому может быть произведена максимизация функции (58) по параметрам, что позволит получить точечные оценки всех параметров модели[25].

4.3. Байесовское оценивание параметров

Байесовский метод оценки параметров DSGE-моделей сочетает в себе процесс калибровки и эконометрического оценивания методом максимального правдоподобия[26].

Используя теорему Байеса и свойства предельной функции плотности вероятности (marginal density), можно записать:

$$p(\theta|\mathcal{F}) = \frac{p(\mathcal{F}|\theta)p(\theta)}{p(\mathcal{F})} = \frac{L(\theta|\mathcal{F})p(\theta)}{\int L(\theta|\mathcal{F})p(\theta)\,d\theta}, \tag{59}$$

где $p(\theta|\mathcal{F})$ – апостериорная функция плотности вероятности вектора параметров модели, $p(\theta)$ – априорная функция плотности вероятности вектора параметров модели.

[24] Подробнее механизм вычисления начальных значений изложен Hamilton (1994, с. 378).

[25] (58), учитывая (55)–(57), зависит от матриц W, Y, X, которые, в свою очередь, зависят от параметров $\alpha, \beta, \delta, g, \varphi, \rho$. (57) в явном виде зависит от σ. Элементы вектора M_t представляют собой логарифмические отклонения наблюдаемых переменных (с исключенным трендом) от устойчивых значений, в определении которых участвуют параметры A и γ.

[26] Байесовское оценивание параметров DSGE-моделей рассматривают, например, Schorfheide (2006), An и Schorfheide (2007).

$p(\theta)$ вычисляется следующим образом. Путем калибровки определяются точечные оценки параметров, которые принимаются за их математические ожидания. На основе предположений автора, значений в других исследованиях и т.д. определяются стандартные отклонения параметров. В зависимости от ограничений на параметры делаются предположения об их законах распределения. Например, если параметр по определению неотрицателен, то используют гамма-распределение; если значения параметра находятся в диапазоне от нуля до единицы, то используют бета-распределение; если параметр может принимать любые значения, то применяют нормальное распределение и т.д. Исходя из априорного математического ожидания и стандартного отклонения параметра, определяется вид $p(\theta)$.

Так как вид функции правдоподобия известен, то можно определить и вид числителя в (59), в то время как знаменатель является константой (не зависит от θ).

Для того чтобы вычислить оценку параметра на основе апостериорного распределения, необходимо оценить его математическое ожидание. Эта задача может решаться с помощью алгоритма случайного блуждания Метрополиса – Гастингса (RWM) и алгоритма выборки по значимости (IS) (An и Schorfheide, 2007).

4.4. Другие методы оценки параметров

Помимо методов, описанных выше, существуют другие методы оценки параметров, которые применяются реже[27]:

1. обобщенный метод моментов, который заключается в минимизации отклонений моментов (например, математического ожидания) реальных данных и моментов переменных, определенных на основе параметров модели. Соответственно, в данном случае необходимо, чтобы выражения для моментов могли быть получены аналитически;
2. метод моментов с применением симулированных данных (simulated method of moments), который фундаментально напоминает предыдущий метод, но моменты не вычисляются аналитически (иногда такие вычисления невозможно осуществить). Вместо этого проводится симуляция временных рядов переменных (при принятых определенных значениях параметров), и используются моменты симулированных данных. Задача состоит в определении таких параметров, при которых расхождение между реальными и симулированными моментами будет минимальным;
3. метод, заключающийся в минимизации расхождения между параметрами векторной авторегрессии (VAR), оцененной по реальным данным, и VAR, оцененной по симулированным данным;
4. метод минимизации значений функций импульс-отклик, полученных с помощью моделей VAR, оцененных по реальным и симулированным данным.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

DSGE-модели являются моделями общего равновесия, основанными на теории реального делового цикла (модели первого поколения) или новой кейнсианской теории (модели второго поколения). Стандартная DSGE-модель описывает поведение по крайней мере домохозяйств и фирм. В более сложных моделях моделируется поведение экономических властей, реализующих бюджетно-налоговую и монетарную политику. В моделях открытой экономики дополнительно моделируется внешний спрос. В DSGE-моделях принимается предположение о репрезентативности экономических агентов.

Домохозяйства в DSGE-моделях максимизируют ожидаемый дисконтированный поток полезностей в условиях бюджетного ограничения. Фирмы максимизируют прибыль, либо ожидаемый дисконтированный поток прибылей с учетом технологических ограничений – производственной функции. Важной особенностью DSGE-моделей является то, что общефакторная производительность предполагается подверженной стохастическим технологическим шокам. Таким образом, модель является динамической и стохастической.

[27] Подробнее данные методы рассматривает Ruge-Murcia (2007).

Для разрешения DSGE-моделей условия оптимальности и другие уравнения модели лог-линеаризуются около устойчивого состояния, после чего решается система линейных уравнений, некоторые из которых могут быть разностными, а также содержать ожидаемые значения переменных. Решение осуществляется с помощью различных методов, например метода Бланшара – Кана.

Параметры DSGE-моделей, во-первых, могут определяться с помощью калибровки, то есть экспертных оценок на основе характеристик статистических данных и результатов других исследований. Во-вторых, для их оценки могут использоваться эконометрические методы. В последние годы наибольшее распространение получило использование байесовского оценивания параметров, учитывающее как априорную экспертную информацию о значениях параметров, так и результаты эконометрической оценки с помощью метода максимального правдоподобия. Тем не менее в настоящее время нет единого мнения научного сообщества относительно большей эффективности какого-либо из методов определения параметров. Несмотря на то что эконометрическое оценивание максимально полно учитывает характеристики реальных статистических данных, для его использования необходимо решение проблемы стохастической сингулярности DSGE-моделей, что связано с дополнением модели сомнительными предпосылками.

Код DSGE-модели, рассмотренной в данной работе, для программы Dynare приведен в Приложении 9.

ЛИТЕРАТУРА

Демиденко, М. (2008). Модель среднесрочного прогнозирования и проектирования монетарной политики, *Банкаўскі веснік*, 31 (432), 41-48.

An, S., Schorfheide, F. (2007). Bayesian Analysis of DSGE Models, *Econometric Reviews*, 26, 2-4, 113-172.

Blanchard, O.J., Kahn, C.M. (1980). The Solution of Linear Difference Models under Rational Expectations, *Econometrica*, 48, 5, 1305-1311.

Boyd, S., Vandenberghe, L. (2004). *Convex Optimization*, Cambridge: Cambridge University Press, 730 p.

Christiano, L.J., Trabandt, M., Walentin, K. (2010). DSGE Models for Monetary Policy Analysis, *NBER Working Paper Series*, 16074.

Christoffel, K., Coenen, G., Warne, A. (2008). The New Area-Wide Model of the Euro Area: A Micro-Founded Open-Economy Model for Forecasting and Policy Analysis, *ECB Working Paper Series*, 944.

Cooley, T.F., Prescott, E.C. (1995). Economic Growth and Business Cycles. In: Cooley, T.F. (ed.) *Frontiers of Business Cycle Research*, Princeton: Princeton University Press, 464 p.

Den Haan, W.J. (2010). Dynamic Optimization Problems, *Teaching Notes*, http://www.wouterdenhaan.com/teach/ch1.pdf.

Galí, J., Gertler, M. (2007). Macroeconomic Modeling for Monetary Policy Evaluation, *Journal of Economic Perspectives*, 21, 4, 25-45.

Galí, J. (2008). *Monetary Policy, Inflation, and the Business Cycle: An Introduction to the New Keynesian Framework*, Princeton: Princeton University Press, 224 p.

Hamilton, J.D. (1994). *Time Series Analysis*, Princeton: Princeton University Press, 820 p.

Hansen, G.D. (1985). Indivisible Labor and the Business Cycle, *Journal of Monetary Economics*, 16, 3, 309-327.

Heer, B., Maußner, A. (2009). *Dynamic General Equilibrium Modeling: Computational Methods and Applications*, 2nd ed., Berlin: Springer, 704 p.

Ireland, P.N. (2004). A Method for Taking Models to the Data, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 28, 6, 1205-1226.

Juselius, K., Franchi, M. (2007). Taking a DSGE Model to the Data Meaningfully, *Economics: The Open-Access, Open-Assessment E-Journal*, 1, 4, 1-38.

Klein, P. (2000). Using the Generalized Schur Form to Solve a Multivariate Linear Rational Expectations Model, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 24, 10, 1405-1423.

Kydland, F.E., Prescott, E.C. (1982). Time to Build and Aggregate Fluctuations, *Econometrica*, 50, 6, 1345-1370.

Ljungqvist, L., Sargent, T.J. (2004). *Recursive Macroeconomic Theory*, 2nd ed., Cambridge: The MIT Press, 1116 p.

Lucas, R.E. (1976). Econometric Policy Evaluation: A Critique, *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, 1, 1, 19-46.

Marcus, M., Minc, H. (1964). *A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities*, Boston: Allyn and Bacon, Inc., 180 p.

Murchison, S., Rennison, A. (2006). ToTEM: The Bank of Canada's New Quarterly Projection Model, *Bank of Canada Technical Reports*, 97.

Ruge-Murcia, F.J. (2007). Methods to Estimate Dynamic Stochastic General Equilibrium Models, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 31, 8, 2599-2636.

Schorfheide, F. (2006). Bayesian Analysis of DSGE Models, *Lecture Notes*, http://www.eabcn.org/training/eltville_2006/implementation.pdf.

Sims, C. (2000). Solving Linear Rational Expectations Models, *Discussion Paper*, http://sims.princeton.edu/yftp/gensys/LINRE3A.pdf.

Smets, F., Wouters, R. (2002). An Estimated Stochastic Dynamic General Equilibrium Model of the Euro Area, *ECB Working Paper Series*, 171.

Tovar, C.E. (2009). DSGE Models and Central Banks, *Economics: The Open-Access, Open-Assessment E-Journal*, 3, 16, 1-31.

Uhlig, H. (1995). A Toolkit for Analyzing Nonlinear Dynamic Stochastic Models Easily, *Federal Reserve Bank of Minneapolis Discussion Paper / Institute for Empirical Macroeconomics Series*, 101.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. РЕШЕНИЕ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ПРОБЛЕМЫ ДОМОХОЗЯЙСТВА

Если перенести все члены соотношений (2) и (3) в правую часть, то эти соотношения можно рассматривать как функции. Для того чтобы с помощью условий Каруша – Куна – Такера получить необходимые и достаточные условия оптимальности, функции в (1), (2), (3) должны быть вогнутыми (Heer и Maußner, 2009, с. 6-7). Так как (2) и (3) можно представить как линейные функции, то они являются одновременно и вогнутыми, и выпуклыми. Функция (1) будет вогнутой, если ее матрица Гессе будет отрицательно полуопределенной, то есть $x^T A x \leq 0$, где A – матрица Гессе, x – вектор любых действительных чисел (Boyd и Vandenberghe, 2004, с. 71, 647). Число элементов вектора x должно быть равно числу строк/столбцов матрицы A. В нашем случае должно выполняться следующее неравенство:

$$[x_1 \quad x_2]\begin{bmatrix} E_t\{-C_t^{-2}\} & 0 \\ 0 & E_t\{-\gamma\varphi H_t^{\varphi-1}\} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq 0, \tag{1.1}$$

где x_1 и x_2 – любые действительные числа.

В (1.1) можно убрать оператор ожидания, так как в фигурных скобках находятся значения переменных в текущем периоде времени. Учитывая этот факт, можно в итоге свести (1.1) к следующему неравенству:

$$C_t^{-2}x_1^2 + \gamma\varphi H_t^{\varphi-1}x_2^2 \geq 0. \tag{1.2}$$

Предполагая, что $H_t > 0$, при выполнении определенных ранее ограничений на параметры, (1.2) будет выполняться. Таким образом, при соблюдении данных ограничений, (1) можно считать вогнутой функцией.

Теперь можно приступить к максимизации (1) при учете (2) и (3), используя условия Каруша – Куна – Такера. Для этого необходимо сформировать следующий лагранжиан:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \\ &= E_t\left\{\sum_{n=t}^{\infty}\beta^{n-t}\left[\ln C_n - \gamma\frac{H_n^{1+\varphi}}{1+\varphi} + \lambda_n\big(W_nH_n + R_nK_n - P_n(C_n + I_n)\big) + \right.\right. \\ &\left.\left. + v_n(K_{n+1} - (1-\delta)K_n - I_n)\right]\right\}, \end{aligned} \tag{1.3}$$

где $\mathcal{L}$ – лагранжиан, $\lambda_n \geq 0$ и v_n – множители Каруша – Куна – Такера.

Максимизация (1.3) должна осуществляться по переменным C_n, H_n, I_n периода с t до бесконечности, по K_n – с периода $t+1$ до бесконечности (так как K_n – предопределенная в предыдущем периоде времени переменная). Однако будущие значения переменных являются недетерминированными. Поэтому домохозяйство в период времени t принимает решение только о значениях переменных периода t (в случае K_n – $(t+1)$), а решения о будущих значениях переменных откладывает до соответствующего периода времени, когда оно будет владеть наиболее полной информацией. Таким образом, с проблемой максимизации (1.3) домохозяйство сталкивается в каждом периоде времени. Более подробное толкование этой проблемы дают Heer и Maußner (2009) и Den Haan (2010).

Исходя из вышеуказанного, запишем условия Каруша – Куна – Такера:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = \frac{1}{C_t} - \lambda_t P_t = 0 \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial H_t} = -\gamma H_t^{\varphi} + \lambda_t W_t = 0 \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_{t+1}} = v_t + \beta E_t\{\lambda_{t+1}R_{t+1} - (1-\delta)v_{t+1}\} = 0 \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial I_t} = -\lambda_t P_t - v_t = 0 \tag{1.7}$$

$$\lambda_t\big(W_t H_t + R_t K_t - P_t(C_t + I_t)\big) = 0. \tag{1.8}$$

Условия (1.4)–(1.8) должны соблюдаться в каждом периоде времени t.

Соотношения (1.4)–(1.7) после ряда алгебраических преобразований можно упростить до двух условий:

$$\frac{W_t}{P_t} = \gamma C_t H_t^{\varphi} \tag{1.9}$$

$$\beta E_t\left\{\frac{R_{t+1}}{C_{t+1}P_{t+1}} + \frac{1-\delta}{C_{t+1}}\right\} = \frac{1}{C_t}. \tag{1.10}$$

Рассмотрим условие (1.8). Сначала заметим, что $\lambda_t P_t$ – это предельная полезность потребления товара, что видно из (1.4). Делая предположение, что $C_t > 0$ в любой период времени, получаем, что предельная полезность потребления всегда положительна (это стандартное предположение, которое формулируется, например, Galí (2008, с. 15)). Исходя из этого, $\lambda_t > 0$, а значит, условие (2) должно соблюдаться как равенство. Соответственно, запишем еще одно условие оптимальности:

$$P_t(C_t + I_t) = W_t H_t + R_t K_t. \tag{1.11}$$

Помимо условий (1.9)–(1.11), для оптимизационных проблем, подобных нашей, формулируется условие трансверсальности, смысл которого рассматривает, например, Den Haan (2010). Согласно данному условию, ожидаемое значение объема капитала в бесконечно далеком периоде, дисконтированное к текущему периоду, должно быть равно нулю:

$$\lim_{T\to\infty} \beta^{T-t} E_t\{\lambda_T P_T K_{T+1}\} = 0, \tag{1.12}$$

где T – период времени.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. РЕШЕНИЕ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ПРОБЛЕМЫ ФИРМЫ

Функция (7) является и выпуклой, и вогнутой одновременно. Так как (8) является ограничением, то для проверки на вогнутость его необходимо привести к виду:

$$F(K_t, H_t, Y_t) = A_t K_t^{\alpha}(z_t H_t)^{1-\alpha} - Y_t. \tag{2.1}$$

У матрицы Гессе функции (2.1) два собственных значения: 0 и:

$$-\frac{\alpha z_t A_t K_t^{\alpha}(1-\alpha)(H_t^2 + K_t^2)}{H_t K_t^2 (z_t H_t)^{\alpha}}. \tag{2.2}$$

Для того чтобы эрмитова матрица была отрицательно полуопределенной, необходимо и достаточно, чтобы все ее собственные значения были неположительными (Marcus и Minc, 1964, с. 69). То есть выражение (2.2) должно быть неположительным. Предполагая, что в любом периоде времени $A_t, H_t, K_t > 0$, необходимо выполнение следующего условия:

$$\alpha - \alpha^2 \geq 0. \tag{2.3}$$

То есть $\alpha \in [0,1]$, что согласуется с изначально определенным ограничением на данный параметр.

По аналогии с решением проблемы домохозяйства можно применить метод Каруша – Куна – Такера для решения оптимизационной проблемы фирмы[28]. Условия максимизации (7) при учете (8) (после некоторых преобразований):

$$\frac{W_t}{P_t} = (1-\alpha)\frac{Y_t}{H_t} \tag{2.4}$$

$$\frac{R_t}{P_t} = \alpha \frac{Y_t}{K_t}. \tag{2.5}$$

[28] Эту проблему можно решить и просто подставив (8) в (7).

ПРИЛОЖЕНИЕ 3. ЛОГ-ЛИНЕАРИЗАЦИЯ СООТНОШЕНИЯ (13) ОКОЛО УСТОЙЧИВОГО СОСТОЯНИЯ

Вид разложения логарифмической функции в ряд Тейлора первого порядка следующий:

$$\ln x_t \approx \ln x + \frac{1}{x}(x_t - x), \tag{3.1}$$

где $x_t, x > 0$.

Далее, учитывая введенные ранее обозначения, можно получить:

$$\hat{x}_t \approx \frac{x_t}{x} - 1. \tag{3.2}$$

Разложим обе части (13) в ряд Тейлора первого порядка:

$$k + (k_{t+1} - k) \approx \frac{1-\delta}{g} k + i + \frac{1-\delta}{g}(k_t - k) + (i_t - i). \tag{3.3}$$

Первые два члена в правой части (3.3) по определению равны k. Учитывая этот факт, разделив обе части (3.3) на k, умножив $(i_t - i)$ на $\frac{i}{i}$ и учитывая (3.2), получаем:

$$\hat{k}_{t+1} \approx \frac{1-\delta}{g} \hat{k}_t + \frac{i}{k} \hat{\imath}_t. \tag{3.4}$$

Используя (24) и (23), окончательно получаем лог-линеаризацию (13) около устойчивого состояния:

$$g\hat{k}_{t+1} \approx (1-\delta)\hat{k}_t + \lambda\hat{\imath}_t. \tag{3.5}$$

Аналогичным образом осуществляется лог-линеаризация других соотношений.

ПРИЛОЖЕНИЕ 4. ВИД НЕКОТОРЫХ МАТРИЦ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ В РАЗДЕЛЕ 3

$$C = \begin{bmatrix} g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\dfrac{\beta\kappa}{g} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1-\delta & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \varphi & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1-\alpha & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1-\dfrac{\alpha\lambda}{\kappa} & 0 & \dfrac{\alpha\lambda}{\kappa} & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

$$G = \begin{bmatrix} -\varphi & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -(1-\alpha) & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{\alpha\lambda}{\kappa} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1-\dfrac{\alpha\lambda}{\kappa} \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

$$L = \begin{bmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{\beta\kappa}{g} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

$$N = \begin{bmatrix} 1-\delta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.8}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 5. АЛГОРИТМ ПРОВЕРКИ ВЫПОЛНЕНИЯ УСЛОВИЯ (45)[29]

```
i=0;
j=0;
for alpha=0.0001:0.045:0.9999
    for beta=0.0001:0.045:0.9999
        for delta=0.0001:0.045:0.9999
            for g=1.0001:0.045:2
                for phi=0:0.1:5
                    kappa=g/beta-1+delta;
                    lambda=g-1+delta;
                    G=[-phi 0 0 1 0;alpha-1 0 0 0 1;-1 0 0 -1 1;0 0 -1 0 1;0 -alpha*lambda/kappa 0 0 1];
                    H=[0 1;alpha 0;0 0;1 0;0 1-alpha*lambda/kappa];
                    K=[0;1;0;0;0];
                    L=[g 0;0 1];
                    M=[0 0 0 0 0;0 0 -beta*kappa/g 0 0];
                    N=[1-delta 0;0 1];
                    P=[0 lambda 0 0 0;0 0 0 0 0];
                    Q=(L+M*G^(-1)*H)^(-1)*(N+P*G^(-1)*H);
                    if min(abs(eig(Q)))<=1
                        if max(abs(eig(Q)))>1
                            i=i+1;
                        else j=j+1;
                        end
                    else j=j+1;
                    end
                end
            end
        end
    end
end
i
j
```

[29] Алгоритм реализован на языке MATLAB. Верхние границы для параметров g и phi определялись с запасом исходя из теоретических соображений, а также (относительно параметра phi) с учетом выводов Christiano, Trabandt и Walentin (2010). Для того чтобы условие (45) выполнялось, значение j по результатам выполнения алгоритма должно быть равно нулю. С помощью алгоритма было протестировано 14 271 891 комбинаций параметров.

ПРИЛОЖЕНИЕ 6. ВЫВОД СООТНОШЕНИЯ (46)

$$E_t G^*_{2,t+1} = J_2 G^*_{2,t} + U_2 \hat{a}_t$$

$$G^*_{2,t} = \frac{1}{J_2} E_t G^*_{2,t+1} - \frac{U_2}{J_2} \hat{a}_t$$

$$G^*_{2,t} = \frac{1}{J_2} E_t \left\{ \frac{1}{J_2} E_{t+1} G^*_{2,t+2} - \frac{U_2}{J_2} \hat{a}_{t+1} \right\} - \frac{U_2}{J_2} \hat{a}_t$$

$$G^*_{2,t} = \frac{1}{J_2^2} E_t G^*_{2,t+2} - \frac{U_2}{J_2^2} \rho \hat{a}_t - \frac{U_2}{J_2} \hat{a}_t$$

$$\ldots$$

$$G^*_{2,t} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{J_2^n} E_t G^*_{2,t+n} - U_2 \hat{a}_t \sum\nolimits_{i=1}^{n} \frac{\rho^{i-1}}{J_2^i} \right)$$

$$G^*_{2,t} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{J_2^n} \right) \lim_{n\to\infty} \left(E_t G^*_{2,t+n} \right) - U_2 \hat{a}_t \lim_{n\to\infty} \left(\sum\nolimits_{i=1}^{n} \frac{\rho^{i-1}}{J_2^i} \right)$$

$$G^*_{2,t} = 0 \times \lim_{n\to\infty} \left(E_t G^*_{2,t+n} \right) - U_2 \hat{a}_t \frac{J_2^{-1}}{1 - \frac{\rho}{J_2}}$$

$$G^*_{2,t} = 0 - U_2 \hat{a}_t \frac{1}{J_2 - \rho}$$

$$G^*_{2,t} = \frac{U_2}{\rho - J_2} \hat{a}_t.$$

При выводе соотношения (46) учитывалось, что $J_2 > 1$, $0 < \rho < 1$, а значит, $0 < \frac{\rho}{J_2} < 1$. Предполагалось, что $E_t G^*_{2,t+n}$ ограничено, так как логарифмические отклонения капитала и потребления (с устраненным трендом) от устойчивых значений – стационарные переменные (согласно введенным предпосылкам). Также учитывалось, что имеет место равенство:

$$E_t\{E_{t+1} x_{t+2}\} = E(E(x_{t+2}|IN_{t+1})|IN_t) = E(x_{t+2}|IN_t) = E_t x_{t+2}, \tag{6.1}$$

где x_t – некоторая переменная, $IN_t \subset IN_{t+1}$.

Доказательство (6.1) приводят Ljungqvist и Sargent (2004, с. 33).

ПРИЛОЖЕНИЕ 7. АЛГОРИТМ РАЗРЕШЕНИЯ МОДЕЛИ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА БЛАНШАРА – КАНА[30]

```
alpha=0.54;
beta=0.99;
delta=0.035;
g=1.016;
phi=3;
kappa=g/beta-1+delta;
lambda=g-1+delta;
G=[-phi 0 0 1 0;alpha-1 0 0 0 1;-1 0 0 -1 1;0 0 -1 0 1;0 -alpha*lambda/kappa 0 0 1];
H=[0 1;alpha 0;0 0;1 0;0 1-alpha*lambda/kappa];
K=[0;1;0;0;0];
L=[g 0;0 1];
M=[0 0 0 0 0;0 0 -beta*kappa/g 0 0];
N=[1-delta 0;0 1];
P=[0 lambda 0 0 0;0 0 0 0 0];
Q=(L+M*G^(-1)*H)^(-1)*(N+P*G^(-1)*H);
[S1,J1]=jordan(Q);
if abs(J1(1,1))<=1 && abs(J1(2,2))>1
    J=J1;
    S=S1;
elseif abs(J1(1,1))>1 && abs(J1(2,2))<=1
    J=[J1(2,2) 0;0 J1(1,1)];
    S=horzcat(S1(:,2),S1(:,1));
elseif abs(J1(1,1))>1 && abs(J1(2,2))>1
    error('explosive solution')
elseif abs(J1(1,1))<=1 && abs(J1(2,2))<=1
    error('multiple equilibria')
else
    error('indeterminacy')
end
rho=0.7;
R=(L+M*G^(-1)*H)^(-1)*(P*G^(-1)*K-M*G^(-1)*K*rho);
S1=S^(-1);
U=S1*R;
V1=-S1(2,1)/S1(2,2);
V2=U(2,1)/S1(2,2)/(rho-J(2,1));
V3=(J(1,1)*S1(1,2)*V2+U(1,1)-S1(1,2)*V2*rho)/(S1(1,1)+S1(1,2)*V1);
V4=G^(-1)*H*[1;V1];
V5=G^(-1)*H*[0;V2]+G^(-1)*K;
W=[J(1,1) V3;0 rho]
X=[0;1]
Y=[V1 V2;V4 V5]
```

[30] Алгоритм реализован на языке MATLAB.

ПРИЛОЖЕНИЕ 8. ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ (В ОБЩЕМ ВИДЕ, НА ОСНОВЕ ВОЗМОЖНОЙ КАЛИБРОВКИ ПО РЕАЛЬНЫМ ДАННЫМ)

$$\alpha = 1 - \frac{wh}{y} \tag{7.1}$$

$$\beta = \frac{k}{c + k - wh} \tag{7.2}$$

$$\gamma = \frac{w}{ch^{\varphi}}$$ (7.3)[31]

$$\delta = 1 - r\frac{k - i}{y - wh} \tag{7.4}$$

$$g = \frac{rk}{y - wh} \tag{7.5}$$

$$A = \frac{y}{h}\left(\frac{hr}{y - wh}\right)^{1 - \frac{wh}{y}}. \tag{7.6}$$

[31] Для окончательного определения γ необходимо определение φ.

ПРИЛОЖЕНИЕ 9. КОД DSGE-МОДЕЛИ ДЛЯ ПРОГРАММЫ DYNARE[32]

```
var a c h i k r w y;
varexo e;

parameters A alpha beta delta g gamma phi rho lambda kappa;
A=1;
alpha=0.54;
beta=0.99;
delta=0.035;
g=1.016;
gamma=0.005;
phi=3;
rho=0.7;
lambda=g-1+delta;
kappa=g/beta-1+delta;

model;
k=(1-delta)/g*k(-1)+i(-1);
w=gamma*c*h^phi;
beta*(r(+1)+1-delta)/c(+1)=g/c;
y=g^(-alpha)*a*k^alpha*h^(1-alpha);
a=(a(-1))^rho*A^(1-rho)*exp(e);
w=(1-alpha)*y/h;
r=alpha*g*y/k;
y=c+i;
end;

steady_state_model;
a=A;
y=a^(1/(1-alpha))*(alpha/kappa)^(alpha/(1-alpha))*(kappa*(1-alpha)/gamma/(kappa-
alpha*lambda))^(1/(1+phi));
c=(1-alpha*lambda/kappa)*y;
h=(kappa*(1-alpha)/gamma/(kappa-alpha*lambda))^(1/(1+phi));
i=alpha*lambda/kappa*y;
k=alpha*g/kappa*y;
r=kappa;
w=(1-alpha)^(phi/(1+phi))*(gamma-gamma*alpha*lambda/kappa)^(1/(1+phi))*y;
end;

shocks;
var e; stderr 1;
end;

stoch_simul(nocorr, nofunctions, order=1);
```

[32] Модель представлена в переменных с устраненным трендом (согласно введенным предпосылкам), то есть используются соотношения (13)–(20). Параметры модели откалиброваны с учетом особенностей Беларуси и других исследований. В программе Dynare лог-линеаризация (также может применяться аппроксимация 2-го и 3-го порядка) и разрешение модели осуществляются автоматически. Для решения лог-линеаризованных систем используется метод, основанный на работах Klein (2000) и Sims (2000). Автоматически могут быть найдены и устойчивые значения переменных, но для успешности реализации данной процедуры в коде должны быть указаны как можно более близкие к устойчивым начальные значения переменных. В данной работе устойчивые значения уже определены, поэтому они задаются вручную.